

Lista 5: CM300 Introdução ao Cálculo

A. Ramos *

October 27, 2019

Abstract

Funções polinomiais, exponenciais e logaritmos.

1 Exercícios

Refaça os exercícios desenvolvidos em aula.

1.1 Funções logarítmicas e aplicações

1. Faça o esboço das seguintes funções

(a) $f(x) = 5^x$, (b) $f(x) = (1/5)^x$, (c) $f(x) = \log_5 x$, (d) $f(x) = \log_{1/5} x$.

2. Sem o uso de calculadora, encontre o valor dos logaritmos.

(a) $\log_2(1/4)$, (b) $\log_{1/4} 2$, (c) $\log_8 32$, (d) $\log_5(1/125)$. (e) $\log_{16} 2$, (f) $\log_{1/9}(1/3)$.

Rpta: (a) -2 , (b) $-1/2$. (c) $5/3$, (d) -3 . (e) $1/4$, (f) $1/2$.

3. Resolva as seguintes equações

(a) $2^x = 16$, (b) $2^{2x+1} = 16$, (c) $2 \cdot 3^{x+5} = 5$, (d) $5^{2x+1} = 2^x$, (e) $4^{3x-2} = 2^{3x}$.

Rpta: (a) $x = 4$, (b) $3/2$, (c) $x = \log_3(5/2) - 5$, (d) $x = (\log_5 2 - 2)^{-1}$, (e) $4/3$.

4. Após uma muda ser plantada em uma horta, o peso (massa) varia segundo a função $\text{peso}(t) = 100 + 3 \cdot 4^t$, onde o peso está em grama e $t \in [0, 3]$ é o tempo decorrido em semana.

(a) no início da primeira semana

Rpta: 112.

(b) no meio da segunda semana.

5. Encontre o número x tal que $\log_x(\frac{9}{4}) = \frac{1}{2}$.

Rpta: $x = 81/16$

6. Resolva as seguintes inequações

(a) $2^x \geq 16$, (b) $2^{2x+1} < 32$, (d) $5^{2x+1} < 2^x$, (e) $(1/4)^{3x-2} \geq (1/2)^{3x}$.

Rpta: (a) $[4, \infty)$, (b) $(-\infty, 2)$, (d) $(-\infty, \frac{1}{\log_5 2 - 2})$, (e) $(-\infty, 4/3]$.

7. Escreva o logaritmo do produtos e quocientes como soma e diferenças.

(a) $\log_8(\frac{wx^2}{64})$

Rpta: $\log_8 w + 2\log_8 x - 2$.

(b) $\log 1000x^2y^3$

Rpta: $3 + 2\log x + 3\log y$.

(c) $\log_6 \frac{1}{36xy^5}$

Rpta: $-6 - \log_6 x - 5\log_6 y$.

8. Resolva as equações logarítmicas.

(a) $\ln(8x - 1) = 4$

Rpta: $x = (e^4 + 1)/8$

(b) $\log(3x - 5) = -1$

Rpta: $x = 17/10$

(c) $\log_5(4x + 3) - \log_5(2x + 5) = -2$

Rpta: $x = -5/7$

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

(d) $\log(x^2 - 8x) = \log(4x + 45)$

Rpta: $x = -3$ e $x = 15$

(e) $\ln(x^2 + 16x) = \ln(4x - 32)$

Rpta: Não existe solução.

9. Suponha que peso de uma muda ser plantada em uma horta é modelada através da função $peso(t) = 100 + b \cdot a^t$, onde o peso está em grama, $t \in [0, 3]$ é o tempo decorrido em semana e $a, b > 0$. Encontre os valores de a e b sabendo que, para $t = 1$ o peso é de 112, e para $t = 2$ o correspondente peso é 148. *Rpta:* $a = 4$, $b = 3$.
10. Uma casa foi avaliada em \$179.900 no ano 2000, e no ano 2013, o avaliação é de \$138.000. Supondo que a depreciação da casa segue o modelo exponencial $y = Ce^{Kt}$, onde y é o valor da casa, C é a quantidade inicial, K é a taxa de crescimento ou decrescimento e t o tempo (em anos). Calcule o valor aproximado da casa em 2020? *Rpta:* \$119,639
11. A população de certa cidade é de 6,250 habitantes em 1975, e em 2010 é de 8,125. Considerando que a taxa de crescimento é exponencial, qual será a população em 2040? Para isso considere o modelo exponencial $y = Ce^{Kt}$, onde y é a população, t o tempo (em anos) e C, K são constantes positivas. *Rpta:* 10,174 habitantes. *Dica:* $K = 0.007496$
12. Um empregado com um vírus contagioso vai a trabalhar numa empresa quando ele está doente. A empresa tem 8500 empregados em total. O crescimento da infecção do vírus é modelado por

$$y = \frac{8.500}{1 + 999e^{-0.6t}},$$

onde y é o número de infectados e t é o tempo em dias. Quando o 45% dos empregados ficarem doentes, a empresa deve fechar. Quantos dias devem passar para que a empresa feche. *Rpta:* 11.

13. Suponha que a renda $r(t)$ de certo produto varia no tempo t de tal forma que $\ln r(t)$ é uma função linear. Se o gráfico de dita função linear passa por $(1, 2)$ e $(3, 7)$, então qual é o valor da renda $r(t)$ quando $t = 2$?